

Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также силы во всех её стержнях способом вырезания узлов.

Дано: $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 5$ кН, $P_3 = 5$ кН, $a = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$.

Решение

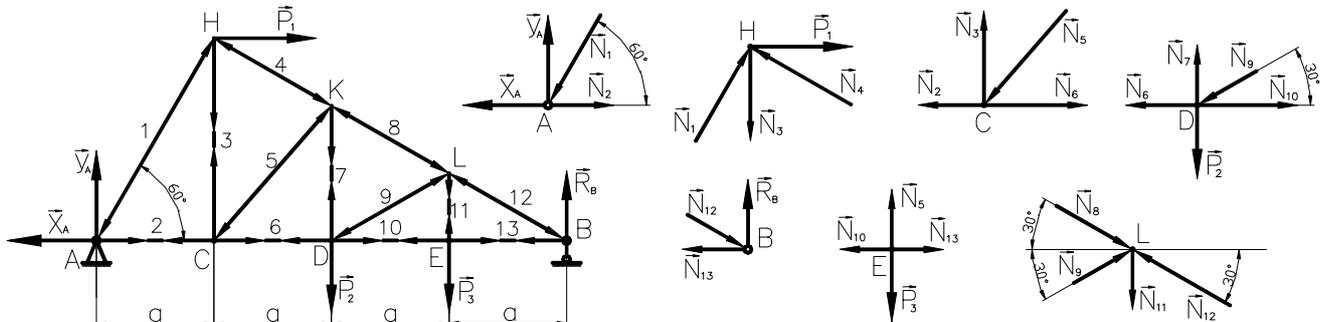


Рис.1

1. Из условий равновесия фермы определим реакции \vec{R}_A и \vec{R}_B соответственно в опорах A и B . Реакцию \vec{R}_A в опоре A разложим на две составляющие \vec{X}_A и \vec{Y}_A .

$$\sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -P_1 \cdot a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - P_2 \cdot 2a - P_3 \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = 0.25\sqrt{3}P_1 + 0.5P_2 + 0.75P_3 = 0.25\sqrt{3} \cdot 3 + 0.5 \cdot 5 + 0.75 \cdot 5 \approx 7.549 \text{ кН.}$$

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad P_1 - X_A = 0 \Rightarrow X_A = P_1 = 3 \text{ кН.}$$

$$\sum_i F_{iy} = 0; \quad Y_A - P_2 - P_3 + R_B = 0 \Rightarrow Y_A = P_2 + P_3 - R_B = 5 + 5 - 7.549 \approx 2.451 \text{ кН.}$$

Суммарная реакция в опоре A равна $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{3^2 + 2.451^2} \approx 8.874 \text{ кН.}$

2. Определим углы между стержнями фермы (см. рис.1).

В прямоугольном треугольнике ΔACH имеем $\angle AHC = 30^\circ$, $AH = 2a$, $CH = \sqrt{3}a$.

В прямоугольном треугольнике ΔBCH имеем $\operatorname{tg} \angle CBH = \frac{\sqrt{3}a}{3a} \Rightarrow \angle CBH = 30^\circ$, $\angle CHB = 60^\circ$.

Имеем равенство треугольников $\Delta BEL = \Delta DEL$, так как они оба прямоугольные и имеют равные катеты. Следовательно, $\angle LBE = \angle LDE = 30^\circ$, $\angle DLE = \angle BLE = 60^\circ$, $BL = DL$.

Так как $BL = DL$, $BL = KL$, т.е.

$DL = KL$, $\angle DLK = 180^\circ - \angle DLE - \angle BLE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, то отсюда следует, что треугольник ΔDKL является равносторонним, а его внутренние углы его равны 60° .

В прямоугольном треугольнике ΔBDK имеем $\angle DBK = 30^\circ$; $\angle BKD = 60^\circ$; $BD = 2a$;

$$DK = BD \cdot \operatorname{tg} \angle BKD = 2a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}a = \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

$$\text{В прямоугольном треугольнике } \Delta DCK \text{ имеем } \operatorname{tg} \angle DCK = \frac{DK}{CD} = \frac{2/\sqrt{3}a}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\cos \angle DCK = \sqrt{\frac{1}{1 + (2/\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}; \quad \sin \angle DCK = \operatorname{tg} \angle DCK \cdot \cos \angle DCK = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

3. Определим усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов (см. рис.1)

$$\text{Узел } A: Y_A - N_1 \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{Y_A}{\sin 60^\circ} = \frac{2.451}{0.5\sqrt{3}} \approx 2.830 \text{ кН};$$

$$N_2 - N_1 \cos 60^\circ - X_A = 0 \Rightarrow N_2 = X_A + N_1 \cos 60^\circ = 3 + 2.830 \cdot 0.5 = 4.415 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел } B: R_B - N_{12} \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow N_{12} = \frac{R_B}{\sin 30^\circ} = \frac{7.549}{0.5} \approx 15.098 \text{ кН};$$

$$N_{12} \cos 30^\circ - N_{13} = 0 \Rightarrow N_{13} = N_{12} \cos 30^\circ = 15.098 \cdot 0.5\sqrt{3} \approx 13.075 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел } E: N_{13} - N_{10} = 0 \Rightarrow N_{10} = N_{13} \approx 13.075 \text{ кН};$$

$$N_{11} - P_3 = 0 \Rightarrow N_{11} = P_3 = 5 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел } H: P_1 + N_1 \cos 60^\circ - N_4 \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{P_1 + N_1 \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{3 + 2.830 \cdot 0.5}{0.5\sqrt{3}} \approx 5.098 \text{ кН};$$

$$N_1 \sin 60^\circ + N_4 \cos 60^\circ - N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = N_1 \sin 60^\circ + N_4 \cos 60^\circ = 2.830 \cdot 0.5\sqrt{3} + 5.098 \cdot 0.5 \approx 5 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел } C: N_3 - N_5 \sin \angle KCD = 0 \Rightarrow N_5 = \frac{N_3}{\sin \angle KCD} = \frac{5}{2/\sqrt{7}} \approx 6.614 \text{ кН};$$

$$N_6 - N_2 - N_5 \cos \angle KCD = 0 \Rightarrow N_6 = N_2 + N_5 \cos \angle KCD = 4.415 + 6.614 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 8.745 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел } D: N_{10} - N_9 \cos 30^\circ - N_6 = 0 \Rightarrow N_9 = \frac{N_{10} - N_6}{\cos 30^\circ} = \frac{13.075 - 8.745}{0.5\sqrt{3}} \approx 5 \text{ кН}.$$

$$N_7 - P_2 - N_9 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow N_7 = P_2 + N_9 \sin 30^\circ = 5 + 5 \cdot 0.5 \approx 7.5 \text{ кН};$$

$$\text{Узел } L: N_8 \cos 30^\circ + N_9 \cos 30^\circ - N_{12} \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_8 = N_{12} - N_9 = 15.098 - 5 \approx 10.098 \text{ кН};$$

Стержень	Усилие	Знак	Состояние
DE	$N_1 = 2.830 \text{ кН}$	-	сжат
EL	$N_2 = 4.415 \text{ кН}$	+	растянут
EH	$N_3 = 5 \text{ кН}$	+	растянут
DH	$N_4 = 5.098 \text{ кН}$	-	сжат
AD	$N_5 = 6.614 \text{ кН}$	-	сжат
HL	$N_6 = 8.745 \text{ кН}$	+	растянут
AH	$N_7 = 7.5 \text{ кН}$	+	растянут
CL	$N_8 = 10.098 \text{ кН}$	-	сжат
KL	$N_9 = 5 \text{ кН}$	-	сжат
HK	$N_{10} = 13.075 \text{ кН}$		растянут
CK	$N_{11} = 5 \text{ кН}$	+	растянут
BC	$N_{12} = 15.098 \text{ кН}$	-	сжат
BK	$N_{13} = 13.075 \text{ кН}$	+	растянут

Ответ: $N_5 = 6.614 \text{ кН}$, $N_6 = 8.745 \text{ кН}$, $N_8 = 10.098 \text{ кН}$.