Задача Д5 (*Вариант 18*) http://www.termeh.ru

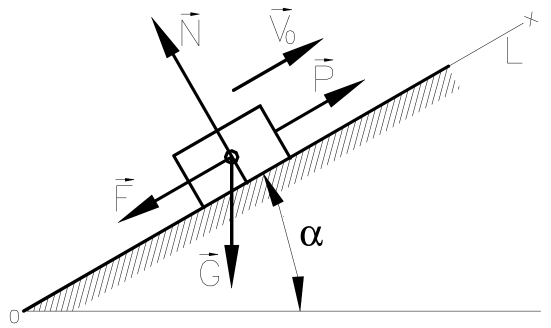
Телу массой m сообщена начальная скорость V_0, направленная вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. На тело действует сила $\vec{P}$, направленная в ту же сторону (рис. 1).

Зная закон изменения силы $P = P(t)$ и коэффициент трения скольжения f определить скорость тела в моменты времени t_1, t_2, t_3 и проверить полученный результат для момента времени t_1 с помощью дифференциального уравнения движения.

При построении графика изменения силы P по заданным ее значениям P_0, P_1 P_2, P_3 для моментов времени t_0, t_1, t_2, t_3 считать зависимость $P = P(t)$ между указанными моментами времени линейной.

Дано: $m = 15\ кг,\ V_0 = 13\ м/с,\ t_1 = 8\ с,\ t_2 = 16\ с,\ t_3 = 20\ с,$

$P_0 = 110\ H,\ P_1 = 150\ H,\ P_2 = 0,\ P_3 = 90\ H,\ \alpha = 26^\circ,\ f = 0.22$.



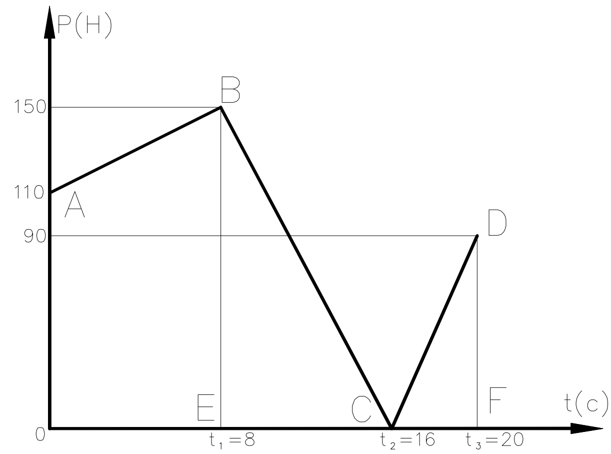


Рис.1 **Рис. 2**

Решение

Покажем силы, действующие на тело: вес $\vec{G}$, , нормальную реакцию плоскости $\vec{N}$, силу $\vec{P}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$, направив ее противоположно начальной скорости, т. е. вниз по наклонной плоскости.

Построим график $P = P(t)$ по заданным значениям P_0, P_1 P_2, P_3 (рис. 2).

1. Для тела, принимаемого за материальную точку, составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения в проекциях на ось x для промежутка времени от 0 до t_1:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_{ix}, \quad (1)$$

где

$$\sum S_{ix} = -Gt_1 \sin\alpha - Ft_1 + S_{px}.$$

Этот интеграл определим как площадь трапеции $OABE$ на графике $P = P(t)$:

$$S_{px} = 0.5 \cdot 8 \cdot (150 + 110) = 1040\ H \cdot c.$$

Учитывая, что сила трения скольжения $F = fN = fG\cos\alpha$, получаем уравнение (1) в следующем виде: $mV_{1x} - mV_{0x} = -mgt_1 \sin\alpha - fmgt_1 \cos\alpha + 1040,$

Откуда $$V_{1x} = V_{0x} - gt_1 \sin\alpha - fgt_1 \cos\alpha + 1040/m.$$

С учетом исходных данных находим

$$V_1 = |V_{1x}| = 13 - 9.81 \cdot 8 \cdot \sin 26^\circ - 0.22 \cdot 9.81 \cdot 8 \cdot \cos 26^\circ + 1040/15 \approx 32.41\ м/с.$$

Примечание. Сила трения скольжения F направлена противоположно скорости, и поэтому, прежде чем производить приведенный расчет, нужно выяснить, не изменит ли скорость тела за время t_1 первоначального направления вверх по наклонной плоскости ($V_{0x} > 0$), а следовательно, сила трения – направления вниз.

Для этого надо установить, возможен ли такой момент времени $t^* < t_1$, при котором скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил $\vec{G}, \vec{N}, \vec{F}$ и силы $\vec{P}$, изменяющейся по закону прямой AB: $P = ((150\text{-}110)/8)t + 110 = 5t + 110$.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для предполагаемого промежутка времени от 0 до t^*:

$$mV_x - mV_{0x} = -mgt^* \sin\alpha - fmgt^* \cos\alpha + S_{px},$$

где в данном случае $V_x = 0, \quad S_{px} = \int_0^{t^*} P_x dt = \int_0^{t^*} (5t + 110)dt = 2.5t^{*2} + 110t^*.$

В результате получим следующее уравнение для определения t^*:

$2.5t^{*2} + 110t^* - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^* + mV_{0x} = 0,$ то есть

$$2.5t^{*2} + 110t^* - 15\cdot 9.81\cdot(\sin 26^\circ + 0.22\cdot\cos 26^\circ)\cdot t^* + 15\cdot 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^{*2} + 6.559\cdot t^* + 78 = 0.$$

В этом уравнении нет действительных корней, т. е. значение скорости всегда положительно.

2. Для определения скорости тела в момент времени t_2 составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени $t_2 - t_1$:

$$mV_{2x} - mV_{1x} = \sum S_{ix}, \qquad (2)$$

где $\sum S_{ix} = -G(t_2 - t_1)\sin\alpha - F(t_2 - t_1) + S_{px}.$

Проекция импульса переменной силы P за $t_2 - t_1$ выражается площадью треугольника BCE на графике $P = P(t)$:

$$S_{px} = 0.5\cdot(16 - 8)\cdot 150 = 600\ H\cdot c.$$

Поэтому уравнение (2) имеет вид

$$mV_{2x} - mV_{1x} = -mg(t_2 - t_1)\sin\alpha - fmg(t_2 - t_1)\cos\alpha + 600,$$

Откуда $V_{2x} = V_{1x} - g(t_2 - t_1)\sin\alpha - fg(t_2 - t_1)\cos\alpha + 600/m.$

С учетом исходных данных находим

$$V_2 = |V_{2x}| = 32.41 - 9.81\cdot 8\cdot\sin 26^\circ - 0.22\cdot 9.81\cdot 8\cdot\cos 26^\circ + 600/15 \approx 22.49\ м/с.$$

Примечание. Сила трения скольжения F направлена противоположно скорости, и поэтому, прежде чем производить приведенный расчет, нужно выяснить, не изменит ли скорость тела за промежуток времени ($t_2 - t_1$) первоначального направления вверх по наклонной плоскости ($V_{1x} > 0$), а следовательно, сила трения – направления вниз.

Для этого надо установить, возможен ли такой момент времени $t_1 < t^* < t_2$, при котором скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил $\vec{G}, \vec{N}, \vec{F}$ и силы $\vec{P}$, изменяющейся по закону прямой AB: $P = ((0 - 150)/(16 - 8)t + 150 = -18.75t + 150$.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для предполагаемого промежутка времени от 0 до t^*:

$$mV_x - mV_{1x} = -mg\Delta t^* \sin\alpha - fmg\Delta t^* \cos\alpha + S_{px},$$

где в данном случае $V_x = 0, \quad S_{px} = \int_0^{\Delta t^*} P_x dt = \int_0^{\Delta t^*} (-18.75t + 150)dt = -9.375t^{*2} + 150t^*.$

В результате получим следующее уравнение для определения t*:
$-9.375t^{*2} + 150t^* - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^* + mV_{1x} = 0,$ то есть
$-9.375t^{*2} + 150t^* - 15\cdot 9.81\cdot(\sin 26^\circ + 0.22\cdot\cos 26^\circ)\cdot t^* + 15\cdot 32.41 = 0 \quad\Rightarrow$
$t^{*2} - 6.016\cdot t^* - 51.859 = 0 \qquad\Rightarrow\qquad t_1^* = -4.8\, c, \quad t_2^* = 10.8\, c.$

В этом уравнении действительные корни не удовлетворяют условию $t_1 < t^* + t_1 < t_2$, которое преобразуется в двойное неравенство, $8 < t^* + 8 < 16$ или $0 < t^* < 8$. Таким образом, значение скорости для промежутка времени $t_2 - t_1 = 8$ c всегда положительно.

3. Для определения скорости тела в момент времени t_3 составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени $t_3 - t_2$:

$$mV_{3x} - mV_{2x} = \sum S_{ix}, \tag{3}$$

где
$$\sum S_{ix} = -G(t_3 - t_2)\sin\alpha - F(t_3 - t_2) + S_{px}.$$

Проекция импульса переменной силы P за $t_3 - t_2 = 4$ выражается площадью треугольника CDE на графике $P = P(t)$:

$$S_{px} = 0.5\cdot(20 - 16)\cdot 90 = 180\ H\cdot c.$$

Поэтому уравнение (3) имеет вид
$mV_{3x} - mV_{2x} = -mg(t_3 - t_2)\sin\alpha - fmg(t_3 - t_2)\cos\alpha + 180,$

Откуда $\qquad V_{3x} = V_{2x} - g(t_3 - t_2)\sin\alpha - fg(t_3 - t_2)\cos\alpha + 180/m.$

С учетом исходных данных находим

$$V_3 = |V_{3x}| = 22.49 - 9.81\cdot 4\cdot\sin 26^\circ - 0.22\cdot 9.81\cdot 4\cdot\cos 26^\circ + 180/15 \approx 9.53\ м/c.$$

Примечание. Сила трения скольжения F направлена противоположно скорости, и поэтому, прежде чем производить приведенный расчет, нужно выяснить, не изменит ли скорость тела за промежуток времени $(t_3 - t_2)$ первоначального направления вверх по наклонной плоскости ($V_{2x} > 0$), а следовательно, сила трения – направления вниз.

Для этого надо установить, возможен ли такой момент времени $t_2 < t^* < t_3$, при котором скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил $\vec{G}, \vec{N}, \vec{F}$ и силы $\vec{P}$, изменяющейся по закону прямой AB: $P = ((90 - 0)/(20 - 16)t + 90 = 22.5t + 90$.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для предполагаемого промежутка времени от 0 до t*:

$$mV_x - mV_{2x} = -mg\Delta t^*\sin\alpha - fmg\Delta t^*\cos\alpha + S_{px},$$

где в данном случае $\quad V_x = 0, \quad S_{px} = \int_0^{\Delta t^*} P_x dt = \int_0^{\Delta t^*}(22.5t + 90)dt = 11.25t^{*2} + 90t^*.$

В результате получим следующее уравнение для определения t*:
$11.25t^{*2} + 90t^* - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^* + mV_{2x} = 0,$ то есть
$11.25t^{*2} + 90t^* - 15\cdot 9.81\cdot(\sin 26^\circ + 0.22\cdot\cos 26^\circ)\cdot t^* + 15\cdot 22.49 = 0 \quad\Rightarrow\quad t^{*2} - 0.32\cdot t^* + 29.987 = 0.$

В этом уравнении нет действительных корней, т. е. значение скорости за промежуток времени $(t_3 - t_2)$ всегда положительно.

Ответ: $V_1 = 32.41\, м/c$, $V_2 = 22.49\, м/c$, $V_2 = 9.53\, м/c$.