Коэффициент жесткости каждой из двух параллельных пружин, на которых лежит плита, c = 130 Н/см. Груз D (m = 40 кг) устанавливают на середину плиты и отпускают без начальной скорости при недеформированных пружинах. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: R = 400V, где V – скорость. Массой плиты и демпфера пренебречь. Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя этого груза (при статической деформации пружин).

Пренебрегая массой плиты и считая ее абсолютно жесткой, найти уравнение движения груза D массой m с момента соприкасания его с плитой, предполагая, что при дальнейшем движении груз от плиты не отделяется.

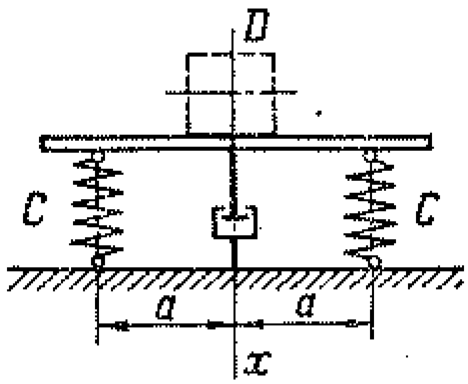

Рис.1

Дано:

m = 40 кг,
c = 130 Н/см,
R = 400V.

Решение

1. Рассмотрим движение тела D, принимая его за материальную точку.

Начало координат O возьмём в положении равновесия тела, ось Ox направим вниз (рис.1).

2. Изобразим на рисунке тело в произвольном положении при его движении вниз,

т. е. по оси Ox, и укажем все действующие на него силы: силу тяжести $\vec{P}$ (вниз), упругую силу пружины $\vec{F}$ (вверх), силу сопротивления $\vec{R}$ (вверх).

3. Составим дифференциальное уравнение движения тела: $m\ddot{x} = P - F - R.$

Здесь $F = 2c\lambda,$ где $\lambda = (\lambda_{cm} + x) -$ деформация пружины в произвольном положении тела, т. е. $m\ddot{x} = P - 2c(\lambda_{cm} + x) - 400V$ или $m\ddot{x} = P - 2c\lambda_{cm} - 2cx - 400\dot{x}.$

Но в положении равновесия O тела D имеем $F_{cm} = P = 2c\lambda_{cm}.$ (1)

Поэтому $m\ddot{x} = -2cx - 400\dot{x}$ или $m\ddot{x} + 400\dot{x} + 2cx = 0,$

Подставляя числовые данные, получим $\ddot{x} + 10\dot{x} + 6.5x = 0.$ (2)

Для однородного дифференциального уравнения (1) имеем характеристическое уравнение $p^2 + 10p + 6.5 = 0,$ корни которого равны

$p_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 6.5} = -5 \pm \sqrt{18.5} \approx -5 \pm 4.3 \quad \Rightarrow \quad p_1 \approx -9.3, \quad p_2 \approx -0.7.$

Запишем общее решение уравнения (2) $x = C_1 e^{-9.3t} + C_2 e^{-0.7t}.$ (3)

4. Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 запишем начальные условия.

В момент $t = 0$ тело находится в точке B, координата которой $x_0 = -\lambda_{cm}$,
и имеет скорость, проекция которой на ось Ox равна $V_0 = 0$.

Из равенства (1) следует, что $\lambda_{cm} = \dfrac{P}{2c} = \dfrac{mg}{2c} = \dfrac{40 \cdot 981}{2 \cdot 130} \approx 150.92\ cм$, тогда $x_0 = -150.92 cм$.

Итак при $t = 0$, $x_0 = -150.92$, $\dot{x}_0 = V_0 = 0$. Тогда из (3) следует

$x_0 = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 + x_0 = -C_2 - 150.92;$

$\dot{x} = -9.3C_1e^{-9.3t} - 0.7C_2e^{-0.7t} \quad \Rightarrow \quad 0 = -9.3C_1 - 0.7C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 \approx -13.31C_1.$

$C_2 = -13.31 \cdot (-C_2 - 150.92) \quad \Rightarrow \quad C_2 \approx -163.18; \quad C_1 = -150.92 - C_2 = -150.92 + 163.18 \approx 12.26$

Ответ: $x = 12.26e^{-9.3t} - 163.18e^{-0.7t}$.