Задача Д23 (*вариант 5*)

Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей.

Найти уравнение движения груза 1 $y = y(t)$, приняв за начало отсчета положение покоя груза 1 (при статической деформации пружин). Найти также амплитуду колебаний груза 1.

В задании приняты следующие обозначения: 1 – груз массой m_1;

4 – сплошной однородный диск массой m_4 и радиусом r_4;

6 – тонкий однородный стержень массой m_6 и длиной ℓ;

c – коэффициент жесткости пружины;

y_0 – начальное отклонение груза по вертикали от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины;

$\dot{y}$ – проекция начальной скорости V_0 груза 1 на вертикальную ось.

Стержень 6 жестко соединен с диском 4. На рис. 1 система из тел 1,4,6 показана в положении покоя (при статической деформации пружин).

<u>**Дано:**</u> $\ell = 0.6\ м,\ r_4 = 0.1`5\ м, m_1 = 1\ кг,\ m_4 = 3\ кг,\ m_6 = 3\ кг,\ c = 16\ Н/см,$

Начальные условия ($t = 0$): $y_0 = 0,\ \dot{y}_0 = 8\ м/c$.

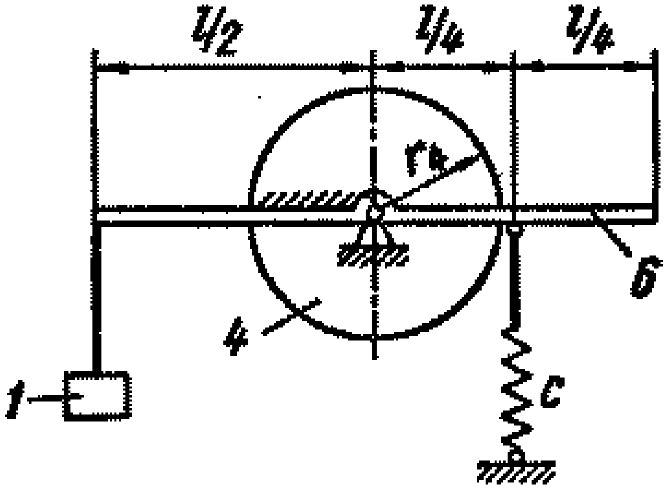

Рис.1

<u>**Решение**</u>

Воспользуемся уравнением Лагранжа II рода для консервативной системы. Приняв за обобщенную координату системы вертикальное отклонение y груза 1 от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial П}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы; $П$ – потенциальная энергия системы.

Кинетическую энергию T вычислим с точностью до величин первого порядка малости относительно $\dot{y}$ и y, а потенциальную энергию $П$ – с точностью до величин первого порядка малости относительно обобщенной координаты y.

Найдем кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий тел 1,4 и 6:

Угловые скорости тел 4 и 6, выраженная через обобщенную скорость $\dot{y}$, и координату y,

$$\omega_4 = \omega_6 = \frac{\dot{y}}{0.5\ell \cdot \cos\varphi}, \qquad (2)$$

где φ – угол поворота стержня 6 (совместно с диском 4) от горизонтального положения.

Ограничиваясь в формуле разложения $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots$ первым членом,

тогда имеем
$$\omega_4 = \omega_6 \approx \frac{2\dot{y}}{\ell}. \tag{3}$$

Момент инерции тела 4 относительно центральной оси вращения
$$J_4 = 0.5 m_4 r_4^2.$$

Момент инерции тела 6 относительно центральной оси вращения
$$J_6 = \frac{m_6 \ell^2}{12}.$$

Кинетическая энергия тела 1, совершающего поступательное движение, имеет следующий вид
$$T_1 = 0.5 m_1 \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия тел 2 и 4, совершающих вращательное движение, имеет следующий вид
$$T_4 = 0.5 J_4 \omega_4^2 = 0.5 m_4 r_4^2 \cdot \left(\frac{2\dot{y}}{\ell}\right)^2; \quad T_6 = 0.5 J_6 \omega_6^2 = 0.5 \cdot \frac{m_6 \ell^2}{12} \cdot \left(\frac{2\dot{y}}{\ell}\right)^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой механической системы
$$T = T_1 + T_4 + T_6 = 0.5 m_1 \dot{y}^2 + 0.5 m_4 r_4^2 \cdot \left(\frac{2\dot{y}}{\ell}\right)^2 + 0.5 \cdot \frac{m_6 \ell^2}{12} \cdot \left(\frac{2\dot{y}}{\ell}\right)^2;$$
$$T = \left(m_1 + \frac{4 m_4 r_4^2}{\ell^2} + \frac{m_6}{3}\right) \cdot \frac{\dot{y}^2}{2}. \tag{4}$$

Найдём потенциальную энергию системы, которая определится работой сил тяжести системы и силы упругости пружины на перемещении системы из отклонённого положения, когда груз имеет координату *y*, в нулевое положение, которым считаем положение покоя системы:
$$\Pi = \Pi_m + \Pi_y. \tag{5}$$

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести при перемещении тела 1 вниз
$$\Pi_{cm} = -G_1 y = -m_1 g y. \tag{6}$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна
$$\Pi_y = 0.5c(f_{cm} + \lambda_K)^2 - 0.5 c f_{cm}^2 = 0.5 c \lambda_K^2 + c f_{cm} \lambda_K = c\lambda_K (f_{cm} + 0.5\lambda_K).$$

где f_{cm} – статическая деформация пружины;

λ_K – перемещение точки прикрепления пружины *К*, соответствующее координате *y*.
$$\lambda_K = -0.25\ell \sin\varphi \approx -0.25\ell\varphi \approx -0.5y.$$

Таким образом,
$$\Pi_y = -0.5cy\left(f_{cm} - 0.25y\right). \tag{7}$$

Из (5) с учетом (6) и (7) находим потенциальную энергию системы
$$\Pi = -m_1 g y - 0.5cy\left(f_{cm} - 0.25y\right). \tag{8}$$

Так как в положении покоя, соответствующем статической деформации пружины
$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad \text{то} \quad -m_1 g - 0.5c\left(f_{cm} - 0.25y\right) - 0.5cy(-0.25) = 0\Big|_{y=0} \quad \Rightarrow \quad -m_1 g - 0.5 c f_{cm} = 0,$$
$$f_{cm} = -\frac{2 m_1 g}{c}.$$

Подставляем это значение в (8) и получаем $\Pi = -m_1 g y - 0.5cy\left(-\frac{2m_1 g}{c} - 0.25y\right) = 0.125cy^2.$ (9)

Найдём значения членов уравнения (1):
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(m_1 + \frac{4m_4 r_4^2}{\ell^2} + \frac{m_6}{3}\right)\dot{y}\right) = \left(m_1 + \frac{4m_4 r_4^2}{\ell^2} + \frac{m_6}{3}\right)\ddot{y}; \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0.25cy.$$

Уравнение (1) приобретает вид $\left(m_1+\dfrac{4m_4r_4^2}{\ell^2}+\dfrac{m_6}{3}\right)\ddot{y}+0.25cy=0$ или

$$\ddot{y}+\left(\frac{0.25c}{m_1+\dfrac{4m_4r_4^2}{\ell^2}+\dfrac{m_6}{3}}\right)y=0.$$

Обозначив k^2 коэффициент при y, имеем $\ddot{y}+k^2y=0.$ (10)

Циклическая частота свободных колебаний

$$k=\sqrt{\frac{0.25c}{m_1+\dfrac{4m_4r_4^2}{\ell^2}+\dfrac{m_6}{3}}}=\sqrt{\frac{0.25\cdot 1600}{1+\dfrac{4\cdot 3\cdot 0.15^2}{0.6^2}+\dfrac{3}{3}}}=\sqrt{\frac{400}{2.75}}\approx 12.06\,c^{-1}.$$

Частота и период свободных колебаний тела 1:

$$\nu=\frac{k}{2\pi}=\frac{12.06}{2\cdot 3.14}\approx 1.92\ \textit{Гц};\qquad T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\cdot 3.14}{12.06}\approx 0.521\,c.$$

Интегрируя уравнение (10), получаем уравнение движения груза 1:

$$y=C_1\cos kt+C_2kt.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 найдём уравнение скорости груза

$$\dot{y}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$$

и воспользуемся условиями задачи. Из уравнений $y=y(t)$ и $\dot{y}=\dot{y}(t)$ при $t=0$ имеем

$y_0=C_1$; $\dot{y}_0=kC_2$. Следовательно, $C_1=y_0$; $C_2=\dot{y}_0/k$.

Подставляем эти значения C_1 и C_2 в уравнение $y=y(t)$:

$$y=y_0\cos kt+(\dot{y}_0/k)\sin kt.$$

$$y=0+8/12.06\sin 12.06t\approx 0.663\sin 12.06t.$$

Уравнение $y=y(t)$ можно получить в другом виде, если перейти к другим постоянным интегрирования a и β, приняв $C_1=a\sin\beta$, $C_2=a\cos\beta$.

Тогда $y=a\sin(kt+\beta)$, где $a=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\beta=arctg(C_1/C_2)$ или

$a=\sqrt{y_0^2+(\dot{y}_0/k)^2}$, $\beta=arctg\left(ky_0^2/\dot{y}_0\right)$.

Найдём амплитуду и начальную фазу колебаний, то есть числовые значения a и β:

$$a=\sqrt{0+(8/12.06)^2}\approx 0.663\ \textit{м},\qquad \beta=arctg\left(0/8\right)=0\quad\Rightarrow\quad\beta=0.$$

Ответ: $\nu=1.92\ \textit{Гц}$; $T=0.521\,c$; $a=0.663\ \textit{м}$; $y=0.663\sin 12.06t$.

Примечание.

При максимальном повороте стержня 6 имеем $\sin\varphi_a=\dfrac{a}{0.5\ell}=\dfrac{0.663}{0.5\cdot 0.6}\approx 2.21>1$,

что невозможно, следовательно, полученный ответ не годится.

Предполагаем изменение начальных условий ($t=0$): $y_0=0$, $\dot{y}_0=8\ \textit{см}/c=0.08\ \textit{м}/c$.

Тогда $a=\sqrt{0+(0.08/12.06)^2}\approx 0.00663\ \textit{м}$, $\beta=arctg\left(0/0.088\right)=0\quad\Rightarrow\quad\beta=0$.

$\sin\varphi_a=\dfrac{a}{0.5\ell}=\dfrac{0.0066333}{0.5\cdot 0.6}\approx 0.022111\quad\Rightarrow\quad\varphi_a\approx 0.022113\ \textit{рад}$, $cos\varphi_a\approx 0.99976$,

то есть $\sin\varphi_a\approx\varphi_a$ с точностью до 6 знака, а $(1-\cos\varphi_a)\approx 1-0.9998\approx 0.0002$,
здесь отличие от 1 начинается в 4 знаке.

Ответ: $\nu=1.92\ \textit{Гц}$; $T=0.521\,c$; $a=0.0066\ \textit{м}=6.6\ \textit{мм}$; $y=0.0066\sin 12.06t\ (\textit{м})$.

Решение А

Кинетическую энергию T вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно $\dot{y}$ и y, а потенциальную энергию Π – с точностью до первого порядка малости относительно обобщенной координаты y.

Найдем кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий тел 1,4 и 6:

Угловые скорости тел 4 и 6, выраженная через обобщенную скорость $\dot{y}$, и координату y,

$$\omega_4 = \omega_6 = \frac{\dot{y}}{0.5\ell \cdot \cos\varphi}. \tag{11}$$

Ограничиваясь в формуле разложения $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots$ двумя первыми членами и учитывая, что $\varphi \approx \sin\varphi = \frac{y}{0.5\ell}$, имеем $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} = 1 - 2\left(\frac{y}{\ell}\right)^2$. (12)

Таким образом, имеем $\omega_4 = \omega_6 \approx \dfrac{\dot{y}}{0.5\ell \cdot \left(1 - 2\left(\frac{y}{\ell}\right)^2\right)} = \dfrac{\dot{y}\cdot\ell}{0.5\ell^2 - y^2}$. (13)

Момент инерции тела 4 относительно центральной оси вращения $J_4 = 0.5 m_4 r_4^2$.

Момент инерции тела 6 относительно центральной оси вращения $J_6 = \dfrac{m_6\ell^2}{12}$.

Кинетическая энергия тела 1, совершающего поступательное движение, имеет следующий вид

$$T_1 = 0.5 m_1 \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия тел 2 и 4, совершающих вращательное движение, имеет следующий вид

$$T_4 = 0.5 J_4\omega_4^2 = 0.5 m_4 r_4^2 \cdot \left(\frac{\dot{y}\cdot\ell}{0.5\ell^2 - y^2}\right)^2; \quad T_6 = 0.5 J_6\omega_6^2 = 0.5\cdot\frac{m_6\ell^2}{12}\cdot\left(\frac{\dot{y}\cdot\ell}{0.5\ell^2 - y^2}\right)^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой механической системы

$$T = T_1 + T_4 + T_6 = 0.5 m_1\dot{y}^2 + 0.5 m_4 r_4^2 \cdot \left(\frac{\dot{y}\cdot\ell}{0.5\ell^2 - y^2}\right)^2 + 0.5\cdot\frac{m_6\ell^2}{12}\cdot\left(\frac{\dot{y}\cdot\ell}{0.5\ell^2 - y^2}\right)^2;$$

$$T \approx \left(m_1 + \frac{3m_4 r_4^2\ell^2 + m_6\ell^4}{6\left(0.5\ell^2 - y^2\right)^2}\right)\cdot\frac{\dot{y}^2}{2} = \left(1 + \frac{3\cdot 3\cdot 0.15^2\cdot 0.6^2 + 3\cdot 0.6^4}{6\cdot\left(0.5\cdot 0.6^2 - y^2\right)^2}\right)\cdot\frac{\dot{y}^2}{2};$$

$$T \approx \left(1 + \frac{0.07695}{\left(0.18 - y^2\right)^2}\right)\cdot\frac{\dot{y}^2}{2}. \tag{14}$$

Найдём значения членов уравнения (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(1 + \frac{0.07695}{\left(0.18 - y^2\right)^2}\right)\dot{y}\right) = \left(1 + \frac{0.07695}{\left(0.18 - y^2\right)^2}\right)\ddot{y} + \left(\frac{0.3078y}{\left(0.18 - y^2\right)^3}\right)\dot{y}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{0.1539y}{\left(0.18 - y^2\right)^3}\right)\dot{y}^2; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0.25cy = 0.25\cdot 1600y = 400y.$$

Уравнение (1) приобретает вид $\left(1 + \dfrac{0.07695}{\left(0.18 - y^2\right)^2}\right)\ddot{y} + \left(\dfrac{0.1539y}{\left(0.18 - y^2\right)^3}\right)\dot{y}^2 + 400y = 0.$ (15)

Решение данного дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции, его решение возможно только численными методами. Таким образом, мы не можем достаточно просто найти ответ по заданным условиям задачи при повышении точности.