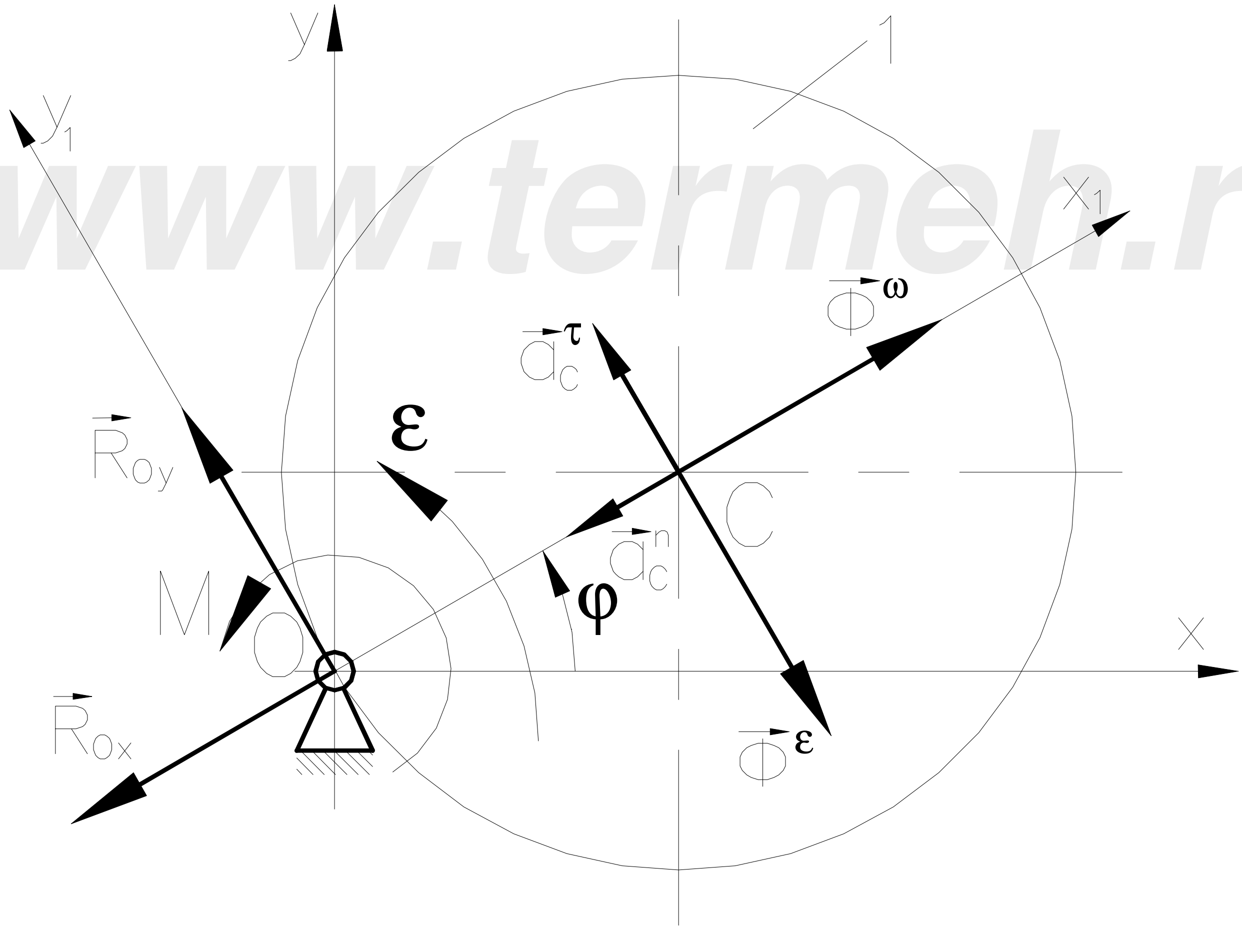
Задача Д16 (*вариант 8*) http://www.termeh.ru

Тело 1 (см. рис.) представляет собой диск с равномерно распределённой массой. Плоскость xOy – горизонтальна.

Определить реакции связей в момент времени $t = t_1 = 5$с.

Дано: $M = 4\ Нм$, $R = 0.30\ м$, $m_1 = 50\ кг$.

Начальные условия: при $t = 0$ $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$.



Решение.

Для определения реакции оси O воспользуемся принципом Даламбера.

При вращательном движении вокруг оси O имеем равенство: $M + M^{\Phi} = 0$, (1)

где $M^{\Phi} = -J_O\varepsilon$ – момент сил инерции диска 1 относительно оси O.

Здесь J_O – момент инерции диска 1 относительно оси O; ε – угловое ускорение диска 1.

Используя теорему Штейнера, определим момент инерции тела диска 1 относительно оси вращения O: $$J_O = J_C + m_1R^2 = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1R^2 = \frac{3}{2}m_1R^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$M - J_O\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad M - 1.5m_1R^2\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{M}{1.5m_1R^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{1.5m_1R^2}t + C_1,$$

где $\omega = \dot{\varphi}$ – текущая угловая скорость диска 1.

Из начальных условий определим постоянную интегрирования: $C_1 = 0$.

Таким образом, получаем $\omega = \dot{\varphi} = \dfrac{M}{1.5m_1R^2}t.$ Интегрируем далее $\varphi = \dfrac{M}{3m_1R^2}t^2 + C_2.$

Из начальных условий получаем $C_2 = 0,$ то есть получаем зависимость: $\varphi = \dfrac{M}{3m_1 R^2} t^2.$ (3)

Известно, что главный вектор сил инерции точек вращающегося тела определяется формуле
$\vec{\Phi} = -m_1 \vec{a}_C,$ (4)
где m_1 – масса тела, $\vec{a}_C$ – ускорение центра масс тела.

Согласно принципа Даламбера имеем равенство $\vec{R}_O + \vec{\Phi} = 0,$ (5)
где $\vec{R}_O$ – реакция оси O. Из (4) и (5) получаем равенство $\vec{R}_O - m_1 \vec{a}_C = 0.$ (6)

Введём другую неподвижную систему координат x_1Oy_1, повернув старую xOy на угол φ_1, который получается в момент времени $t = t_1$ (см. рис.).

Вектор ускорения $\vec{a}_C$ точки C разложим на две составляющие: $\vec{a}_C^n$ – нормальную и $\vec{a}_C^\tau$ – тангенциальную, где $\vec{a}_C^n \perp \vec{a}_C^\tau$ и $\vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau$.

Спроецируем равенство (6) на новую систему координат. Отметим, что $\vec{a}_C^n$ и $\vec{a}_C^\tau$ параллельны новым осям x_1Oy_1 (см. рис.), тогда с учетом знаков получаем

$$R_{Ox} - m_1 a_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Ox} - (-m_1 a_C^n) = 0 \Rightarrow R_{Ox} + m_1 \omega^2 R = 0 \Rightarrow R_{Ox} = -m_1 \omega^2 R;$$
$$R_{Oy} - m_1 a_{Cy} = 0 \Rightarrow R_{Oy} - m_1 a_C^\tau = 0 \Rightarrow R_{Oy} - m_1 \varepsilon R = 0 \Rightarrow R_{Oy} = m_1 \varepsilon R.$$

Суммарная реакция оси O равна $R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = m_1 R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2};$

$$R_O = m_1 R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = m_1 R \sqrt{\left(\frac{M}{1.5 m_1 R^2} t_1\right)^4 + \left(\frac{M}{1.5 m_1 R^2}\right)^2} = \frac{M}{1.5R} \sqrt{\left(\frac{M}{1.5 m_1 R^2}\right)^2 \cdot t_1^4 + 1}$$

$$R_O = \frac{4}{1.5 \cdot 0.3} \sqrt{\left(\frac{4}{1.5 \cdot 50 \cdot 0.3^2}\right)^2 \cdot 5^4 + 1} \approx 132\ H.$$

Ответ: $R_O = 132\ H.$